Planche n° 32. Séries numériques

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*I)** Un calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

1) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\frac{1}{n^2}=\int_0^{\pi}\left(at^2+bt\right)\cos(nt)\,dt$.

2) Montrer que $\forall t\in]0,\pi]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}$.

3) En utilisant le lemme de Lebesgue, déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Exercice n° 2 (I)** Un calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1) En remarquant que $\forall k\geqslant 1$, $\displaystyle\frac{1}{k}=\int_0^1 t^{k-1}\,dt$, montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n\geqslant 1$, converge et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

2) En adaptant l'idée précédente, montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, $n\geqslant 0$, converge et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice n° 3 (*I)** Séries de Bertrand.

Soient α et β deux réels. Pour $n\geqslant 2$, on pose $u_n=\dfrac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$.

1) Deux exemples : montrer que la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^2}$, $n\geqslant 1$, converge et que la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$, $n\geqslant 2$, diverge.

2) Montrer que si $\alpha<0$, la série de terme général u_n diverge grossièrement.

3) Montrer que si $0\leqslant\alpha<1$, la série de terme général u_n diverge.

4) Montrer que si $\alpha>1$, la série de terme général u_n converge.

5) Dans cette question, $\alpha=1$.

a) Montrer que si $\beta\leqslant 0$, la série de terme général u_n diverge.
b) En comparant u_n à une intégrale, montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\beta>1$.

Exercice n° 4

Nature de la série de terme général

1) (*) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ **2)** (*) $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ **3)** (**) $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ **4)** (**) $\dfrac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$

5) (**) $\operatorname{Arccos}\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n^2}}$ **6)** (*) $\dfrac{n^2}{(n-1)!}$ **7)** $\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ **8)** (**) $\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\dfrac{n^2+1}{n}\right)$

9) (*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$ **10)** (**) $n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$ **11)** (**) $e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice n° 5

Nature de la série de terme général

1) (***) $\sqrt[4]{n^4+2n^2}-\sqrt[3]{P(n)}$ où P est un polynôme. 2) (***) $\dfrac{1}{n^\alpha}S(n)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, où $S(n)=\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}$, $n\geqslant 2$.

3) (**) u_n où $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$. 4) (**) $\operatorname{Arctan}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^a\right)-\operatorname{Arctan}\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^a\right)$, $a\in\mathbb{R}$.

5) (***) $\dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{3/2}$.

Exercice n° 6

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

1) (**) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$ 2) (**) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n}$ 3) (**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(n-1)!}$

4) (**) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 5) (***) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ 6) (***) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{a}{2^n}\right)$ $a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}\frac{a}{2^n}}{2^n}$, $a\in\mathbb{R}^*$.

Exercice n° 7 (* I)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Trouver un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers 0.

Exercice n° 8 (***)

Trouver un développement limité à l'ordre 4 quand n tend vers l'infini de $\left(e-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\times(n+1)!$.

Exercice n° 9 (***)

Nature de la série de terme général $u_n=\sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Exercice n° 10 (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice n° 11 (***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Trouver la nature de la série de terme général $v_n=\dfrac{u_n}{(1+u_1)\ldots(1+u_n)}$, $n\geqslant 1$, connaissant la nature de la série de terme général u_n puis en calculer la somme en cas de convergence.

Exercice n° 12

Convergence et somme éventuelle de la série de terme général

1) (**) $u_n=\dfrac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$ 2) (***) $u_n=\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$, $n\geqslant 1$, $a\in\mathbb{R}^{+*}$ donné.

Exercice n° 13 (*)

Nature de la série de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^p}$, $p\in]0,+\infty[$.

Exercice n° 14 (I)**

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice n° 15 (* I)**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1) Justifier l'existence de R_n. Quelle est la limite de R_n ?

2) En encadrant $\frac{1}{k^2}$ par des termes généraux de sommes télescopiques, montrer que $R_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

3) En commençant par remarquer que $\frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$, déterminer le développement limité à l'ordre 2 de R_n quand n tend vers l'infini.

Exercice n° 16 (***)

Calculer $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*,\ n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2}\right)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}^*,\ p \neq n} \frac{1}{n^2 - p^2}\right)$. Que constatez-vous ?

Exercice n° 17 (***)

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \geqslant 0$.

Exercice n° 18 (****)

Pour $n \geqslant 1$, on note p_n le n-ème nombre premier. On veut montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$.

1) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{p_n}$ est de même nature que la série de terme général $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$.

2) En utilisant la décomposition d'un entier naturel supérieur ou égal à 2, montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right).$$

Conclure.

